الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (06 نقاط)

بيّنتْ دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنويًا وبالمقابل يُوظّف 3000 عامل سنويًا. علماً أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي $u_0=50$.

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=0{,}95u_n+3$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=60-u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) اكتب v_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

ج) قدّر عدد العمال سنة 2017.

د) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

هـ) احسب نهاية المتتالية (u_n). هل يمكن أن يصِل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

مصنع سيارات يشتغل بوحدتين A و B وينتج نوعين: سيارات تسير بالبنزين يُرمز إليها بـE وأخرى بغير البنزين $\overline{E}$.

رُبع إنتاج هذا المصنع تصنعه الوحدة A .

اشترى شخص سيارة من إنتاج هذا المصنع، احتمال أن تكون هذه السيارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين يساوي $\frac{1}{6}$، واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$.

(تعطى كل النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال).

1) بيّن أنّ احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$.

2) احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة B.

3) أ) احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين.

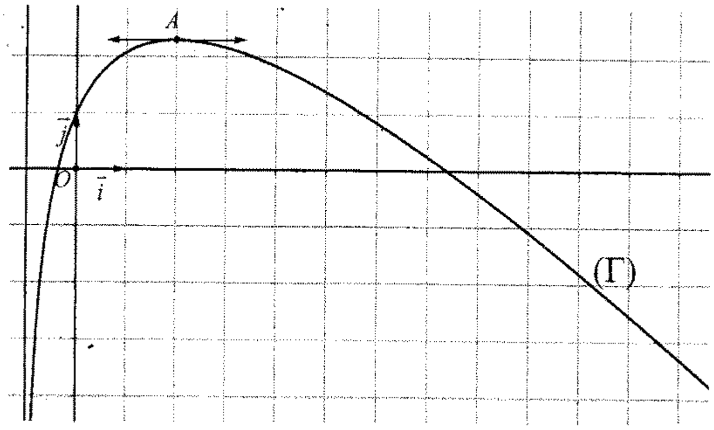
ب) علماً أنّ السيارة تسير بالبنزين ما احتمال أن تكون من صنع الوحدة A ؟

4) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه الوضعية.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) f دالة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=ax+b+3\ln(x+1)$ ، حيث a و b عددان حقيقيان.



(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل المقابل ، يقبل في النقطة $A(2;-1+3\ln 3)$ مماسًا موازيًا لحامل محور الفواصل.

1) بقراءة بيانية:

أ) ضع تخميناً حول:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من a و b .

II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x)=-x+1+3\ln(x+1)$.

1) احسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر.

2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. (يُعطى $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=0$)

3) أ) عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازيًا للمستقيم الذي معادلته $y=x$ ، ثم اكتب معادلة للمماس (T).

ب) استنتج بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين موجبين تمامًا.

4) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$.

أ) احسب $g'(x)$ ؛ ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل ،

بيّن أنّ: $\alpha\in]7,37\,;\,7,38[$ و $\beta\in]-0,37\,;\,-0,36[$.

جـ) احسب S مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

د) تحقّق أنّ: $S=\left(\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha-1\right)ua$ ؛ ثمّ عيّن حصرًا لـ S.(ua وحدة مساحة)

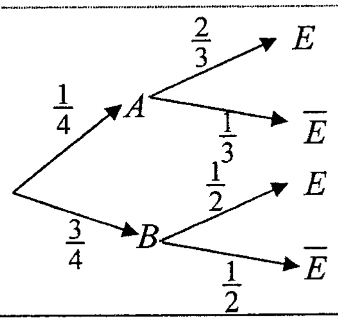
III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

تُنمذج الكلفة الهامشية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0;7]$ بالدالة f المعرّفة في الجزء II) ، أي من أجل $x\in[0;7]$ لدينا $C_m(x)=f(x)$.

نرمز بـ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

1) عيّن عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\dfrac{5}{2}$.

2) قدّر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة.

(الموضوع الثاني) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (06 نقاط)		06 نقاط
1. $u_1=0{,}95u_0+3=50{,}5$ ؛ $u_2=0{,}95u_1+3=50{,}975$	01	
2. أ - $u_{n+1}=u_n-\frac{5}{100}u_n+3$ ومنه $u_{n+1}=0{,}95u_n+3$.	01	
ب -(u_n) ليست حسابية لأنّ $u_1-u_0\neq u_2-u_1$ أو $u_{n+1}\neq u_n+r$	0,25	
(u_n) ليست هندسية لأنّ $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$ أو $u_{n+1}\neq qu_n$	0,25	
3. أ - $v_{n+1}=0{,}95v_n$ ؛ $q=0{,}95$ ، $v_0=10$	0,5×2	
ب - $v_n=10\times0{,}95^n$ ؛ $u_n=60-10\times0{,}95^n$	0,5×2	
جـ - لدينا $u_5=60-10\times0{,}95^5$ إذن عدد العمال في سنة 2017 هو: 52262.	0,5	
د - $u_{n+1}-u_n=0{,}5\times0{,}95^n>0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.	0,5	
هـ - $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(60-10\times0{,}95^n\right)=60$	0,25	
عدد العمال في هذا القطاع الصناعي لن يصل 60000 عاملا	0,25	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		05 نقاط
1. $P_A(E)=\frac{P(A\cap E)}{P(A)}=\frac{2}{3}$	01	
2. $P_B(E)=\frac{P(B\cap E)}{P(B)}=\frac{1}{2}$	01	
3. أ - $P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=\frac{13}{24}$	01	
ب - $P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{4}{13}$	01	
4. 	01	

تابع للموضوع الثاني — عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الثالث: (09 نقاط)		
I) 1. أ - $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	0,5	
ب - جدول التغيرات	0,5	
2. $f'(x) = a + \dfrac{3}{x+1}$	0,5	
من $f'(2)=0$ نجد $a=-1$	0,5	
من $f(2) = -1+3\ln 3$ نجد $b=1$	0,5	
II) 1. $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$	0,25	
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	0,5	
3. أ - $f'(x)=1$ نجد $x=\dfrac{1}{2}$ ومنه $B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}+3\ln\dfrac{3}{2}\right)$	0,5	
$y = x + 3\ln\dfrac{3}{2}$	0,5	
ب - $f(x) = x+m$ تقبل حلين موجبين تماما من أجل $1 < m < 3\ln\dfrac{3}{2}$	0,75	09 نقاط
4. أ - $g'(x) = \ln(x+1)$	0,25	
F دالة أصلية لـ f على $]-1;+\infty[$: $F(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1)$	0,5	
ب - $f(7{,}37) \approx 0{,}003$ ؛ $f(7{,}38) \approx -0{,}002$	0,5	
$f(-0{,}37) \approx -0{,}01$ ؛ $f(-0{,}36) \approx 0{,}02$	0,5	
جـ - $S = \int_0^{\alpha} f(x)dx$ ومنه $S = -\dfrac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 3(\alpha+1)\ln(\alpha+1)\ ua$	0,5	
د - $S = \left(\dfrac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) ua$	0,25	
$11{,}39845 < S < 11{,}4922$	0,5	
III) 1. $C_T(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + c$ مع $C_T(1) = \dfrac{5}{2}$ $c = 5 - 6\ln 2$ ومنه $C_T(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + 5 - 6\ln 2$	0,5	
2. $C_T(7) \approx 12{,}247713$ أي $C_T(7) \approx 12247{,}713\,DA$	0,5	